Controle des systemes non lineaires comportant des contraintes distribuees sur l'etat

J. Frederic Bonnans, Eduardo Casas

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 300

CONTRÔLE DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES COMPORTANT DES CONTRAINTES DISTRIBUÉES SUR L'ÉTAT

Joseph Frédéric BONNANS
Eduardo CASAS

Mai 1984

CONTROLE DE SYSTEMES NON LINEAIRES COMPORTANT DES CONTRAINTES DISTRIBUEES SUR L'ETAT

Joseph Frédéric BONNANS* - Eduardo CASAS**

Résumé

Nous nous intéressons à la question de l'obtention de conditions nécessaires d'optimalité de problèmes de contrôle comportant des contraintes sur l'état. La nécessite du choix d'un cadre fonctionnel adapté à la contrainte sur l'état est illustrée lors de l'étude d'un problème convexe. Puis nous formulons un résultat abstrait qui permet d'exprimer les conditions d'optimalité lorsque le système est non linéaire. Nous donnons des exemples d'application pour des systèmes de type elliptique, parabolique et hyperbolique.

Abstract

We are concerned by the formulation of necessary optimality conditions for state constrained control problems. The necessity of a functional framework adapted to the state constraint is shown on a convex problem. Then we formulate an abstract result, allowing to express the optimality conditions when the system is non linear. We give some examples of applications to systems of elliptic, parabolic or hyperbolic type.

---

* INRIA, Domaine de Voluceau, BP 105, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cédex (France).

** Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Ciencias, Universidad de Santander (Espagne).

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier divers problèmes de contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles non linéaires, soumis à des contraintes sur le contrôle et sur l'état, ces dernières étant distribuées. Nous obtenons des résultats d'existence de contrôle optimal et d'existence de multiplicateurs de Lagrange, sous la forme de Fritz John.

Les premiers travaux concernant les problèmes de contrôle avec des contraintes sur l'état supposent l'absence de contraintes sur le contrôle : dans le cas d'un système linéaire, plusieurs exemples sont traités dans J.L. Lions [20] ; voir aussi I. Ekeland & R. Temam [16], p. 191. Dans le cas du problème parabolique, avec des contraintes sur l'état locales en temps, I. Lasiecka [19] a obtenu des résultats de régularité du contrôle optimal et des multiplicateurs. L'existence de multiplicateurs a aussi été obtenue pour des systèmes non linéaires singuliers (J.L. Lions [23]).

Les travaux prenant en compte l'existence de contraintes sur le contrôle et sur l'état ont généralement porté sur des systèmes linéaires. La plupart des travaux concernant des problèmes convexes. J. Mossino ([27], p. 236 et suivantes) étudie le contrôle d'un système elliptique, soumis à une contrainte locale sur le contrôle et sur le gradient de l'état, sans donner de résultat d'existence de multiplicateur ; cette question sera résolue, dans un cadre fonctionnel adapté, au paragraphe 2. V. Mackenroth [24] étudie un système parabolique, contrôlé par les conditions de Neumann et soumis à une contrainte ponctuelle sur l'état final. Le même auteur a étudié [25] un système parabolique, contrôlé de façon distribuée, soumis à des contraintes locales en temps sur le gradient de l'état. Le cas du système elliptique, soumis à des contraintes locales sur l'état, a été étudié par E. Casas [12] qui a aussi montré [13] qu'une approximation du problème obtenue par éléments finis permet de calculer une approximation du contrôle optimal, et aussi du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur l'état. Le cas d'un système linéaire associé à un critère lipschitzien est étudié dans J.P. Aubin - F. Clarke [3]. Dans le cas où le système est non linéaire, notons la résolution du problème du contrôle d'un système elliptique par les coefficients, en présence d'une contrainte locale sur l'état, dûe à E. Casas [12]. Un problème d'un type différent, mais relié aux précédents, étudié dans J.F. Bonnans, C. Moreno, C. Saguez [8], est celui de l'optimisation de la structure de l'ensemble des instants où l'état vérifie une relation, par exemple en maximisant la mesure de cet ensemble.

Notre étude utilise de façon essentielle deux outils. Le premier est le choix d'un cadre fonctionnel adapté à la contrainte sur l'état. La méthode est illustrée au paragraphe suivant, dans le cas d'un système linéaire. Dans les exemples de systèmes non linéaires traités par la suite, nous vérifions qu'un cadre fonctionnel convenable est donné par un système linéaire voisin ; cette idée, dûe à J.L. Lions, est utilisée dans J.F. Bonnans [6] [7] pour prendre en compte une contrainte d'appartenance de l'état à un espace de type L^p. Le second outil, exposé au paragraphe 3 est un théorème exprimant les conditions d'optimalité d'un problème abstrait ; le théorème est une extension d'un résultat de E. Casas [13], et sa démonstration utilise la théorie de F.H. Clarke [14] [15]. Nous donnons des conditions de normalité du problème. La méthode est ensuite appliquée à plusieurs problèmes de contrôle d'équations aux dérivées partielles : nous étudions au paragraphe 4 le contrôle distribué d'un système semi-linéaire de type elliptique avec des contraintes locales sur le gradient de l'état ; au paragraphe 5, le contrôle d'un système similaire par les conditions de Neumann, avec des contraintes ponctuelles sur la valeur de l'état au bord, puis par les conditions de Dirichlet, avec des contraintes locales sur la dérivée normale ; au paragraphe 6, le contrôle distribué d'une équation de type diffusion-réaction, avec une contrainte ponctuelle sur l'état final ; au paragraphe 7, le contrôle distribué d'une équation semi-linéaire de type hyperbolique, avec une contrainte locale sur la dérivée de l'état final. Enfin nous étudions en annexe une extension de la notion de support aux éléments du dual d'un espace de type L^∞.

II - UN PROBLEME A EQUATION D'ETAT LINEAIRE DE TYPE ELLIPTIQUE

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, de frontière Γ régulière. Considérons le système

$$(2.1) \qquad \begin{cases} -\Delta y = u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ y \equiv 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On sait (J. Necas [28]) que si u est donné dans $L^2(\Omega)$, (2.1) a une solution unique y_u dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, où $H^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$, fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui ont une trace nulle sur Γ.

Soit $N \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$ et

$$(2.2) \qquad J(u) = \frac{N}{2} \int_\Omega u^2(x)dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (y_u(x) - y_d(x))^2 dx.$$

Nous nous intéressons au problème

$$(2.3)_\delta \qquad \begin{cases} \text{Min } J(u), \\ u \in K, \quad ||\nabla y_u(x)||_E \leq \delta, \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

où K est un convexe formé de $L^2(\Omega)$, $||.||_E$ est une norme de $\mathbb{R}^n$, et δ est un réel strictement positif. Le problème est semblable à l'un de ceux considérés par J. Mossino ([27], p. 236), qui ne donne pas de résultat d'existence de multiplicateurs.

Théorème 2.1

On suppose qu'il existe un contrôle admissible (un élément u_o de K tel que y_{u_o} vérifie la contrainte sur l'état) et que

$$(2.4) \qquad N > 0 \text{ ou } K \text{ est borné dans } L^2(\Omega).$$

Alors le problème $(2.3)_\delta$ possède une solution unique $\bar{u}$. □

Démonstration

L'existence d'un contrôle admissible et la positivité de J assurent que l'infimum de $(2.3)_\delta$ est fini. Soit $\{u^n\}$ une suite minimisante vérifiant les contraintes sur le contrôle et sur l'état et notons $y^n = y_{u^n}$. D'après (2.4), $\{u^n\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $\{y^n\}$ est donc bornée dans $H^2(\Omega)$. Il existe donc $(\bar{u},\bar{y}) \in L^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ tels que

$$u^n \rightharpoonup \bar{u} \quad L^2(\Omega) \text{ faible},$$
$$y^n \rightharpoonup \bar{y} \quad H^2(\Omega) \text{ faible},$$

D'autre part, l'ensemble

$$S = \{(u,y) \in L^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \; ; \; u \in K, \; ||\nabla y(x)||_E \leq \delta, \text{ p.p.} x \in \Omega \text{ et } (2.1)\}$$

est un convexe fermé de $L^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ et il est donc faiblement fermé : d'où $(\bar{u},\bar{y}) \in S$. Le critère J étant convexe et continu, il est f.s.c.i. : on en déduit que $\bar{u}$ est une solution de $(2.3)_\delta$.

L'unicité de la solution résulte de la stricte convexité de J, qui est conséquence de l'injectivité de l'application

$$L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \to y_u. \qquad \square$$

Remarque 2.1

L'existence d'un ensemble non trivial de contrôles admissibles se vérifie par exemple si K contient un voisinage de 0 dans $L^2(\Omega)$: il existe alors $\varepsilon > 0$ tel, que si $u \in H^1(\Omega)$ et $||u||_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$, u est admissible. $\square$

Nous désirons exprimer les conditions d'optimalité de $(2.3)_\delta$. Pour ceci, notons

$$Z = L^{\infty}(\Omega)^n,$$
$$Z_\delta = \{z \in Z \; ; ||z(x)||_E \leq \delta, \text{ p.p. } x \in \Omega\} .$$

L'espace fonctionnel des contrôles, adapté à la contrainte sur l'état, est

$$U = \{u \in L^2(\Omega) \; ; \; \nabla y_u \in Z\}.$$

Muni de la norme

$$||u||_U = ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla y_u||_Z,$$

où Z est muni de la topologie produit, c'est un espace de Banach. Il en est de même pour l'espace

$$Y = \{y \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \; ; \; \nabla y \in Z\},$$

muni de la norme

$$||y||_Y = ||y||_{H^2(\Omega)} + ||\nabla y||_Z .$$

Nous ferons l'hypothèse de qualification

(2.5) $\qquad \exists \alpha \in [0,\delta[, \; \exists u_o \in K \; ; \; ||\nabla y_{u_o}(x)||_E \leq \alpha \; , \text{ p.p. } x \in \Omega.$

qui est vérifiée par exemple si $\{0\} \in K$.

<u>Théorème 2.2</u>

Soit $\bar{u}$ la solution de $(2.3)_\delta$. Si (2.5) est vérifiée, il existe $\bar{q} \in H^2(\Omega)$, $\bar{p} \in U'$, $\bar{\mu} \in Z'$ tels que, notant $\bar{y} = y_{\bar{u}}$:

(2.6) $$\begin{cases} -\Delta\bar{q} = \bar{y} - y_d \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \bar{q} = 0 \quad \Gamma \; ; \end{cases}$$

(2.7) $\qquad \langle\bar{p}, \Delta z\rangle_{U'U} + \langle\bar{\mu}, \nabla z\rangle_{Z'Z} = 0, \; \forall z \in Y,$

(2.8) $\quad \langle \bar{\mu}, z-\nabla\bar{y}\rangle_{Z'Z} \leq 0, \ \forall z \in Z_\delta,$

et

(2.9) $\quad \int_Q (N\bar{u} + \bar{q})(v - \bar{u})dx + \langle \bar{p}, v - \bar{u}\rangle_{U'U} \geq 0, \ \forall v \in K \cap U.$ □

Remarque 2.2

Le problème étant convexe, les conditions nécessaires d'optimalité ci-dessus sont également suffisantes. □

Démonstration du théorème 2.2

Soit L l'application $u \to \nabla y_u$, qui est linéaire et continue de U dans Z. Le problème $(2.3)_\delta$ équivaut à [1]

$$\mathrm{Min}\{I_{K\cap U}(u) + J(u) + I_{Z_\delta}(Lu)\}.$$

Le problème étant convexe, $\bar{u}$ vérifie

$$\partial[I_{K\cap U}(u) + J(u) + I_{Z_\delta}(Lu)] \ni 0 \text{ dans } U.$$

Grâce à (2.5) et aux règles sur le calcul sous-différentiel (cf. [16]) il vient

$$\partial I_{K\cap U}(\bar{u}) + J'(\bar{u}) + L^*\partial I_{Z_\delta}(L\bar{u}) \ni 0,$$

ou encore : il existe $\bar{\mu} \in \partial I_{Z_\delta}(L\bar{u})$, donc vérifiant (2.7), tel que

(2.10) $\quad \int_\Omega N\bar{u}(v-\bar{u})dx + \int_\Omega(\bar{y}-y_d)(y_v-\bar{y})dx + \langle L\bar{\mu}, v-\bar{u}\rangle_{U'U} \geq 0, \ \forall v \in K \cap U.$

Soit $\bar{q} \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ la solution de (2.6). Il vient, en appliquant la formule de Green

---

([1]) On note I_C la fonction indicatrice d'un ensemble C, qui vaut 0 sur C et $+\infty$ ailleurs.

$$(2.11)\quad \begin{cases} \int_\Omega (\bar{y}-y_d)(y_v-y_d)\,dx = \int_\Omega -\Delta\bar{q}(y_v-\bar{y})\,dx \\ \qquad = \int_\Omega \bar{q}\,(-\Delta y_v - (-\Delta\bar{y}))\,dx \\ \qquad = \int_\Omega \bar{q}(v-\bar{u})\,dx. \end{cases}$$

Posons $\bar{p} = L^*\bar{\mu}$; de (2.10) (2.11) on déduit (2.9). Mais pour tout $v \in U$:

$$\langle \bar{p}, v\rangle_{U'U} = \langle \bar{\mu}, Lv\rangle_{Z'Z},$$

$$= \langle \bar{\mu}, \nabla y_u\rangle_{ZZ}$$

Or on peut choisir y_v quelconque dans Y (alors $v = -\Delta y_v$ est dans U) d'où (2.7). □

Remarque 2.3

Si $K \subset L^\beta(\Omega)$ avec $\beta > n$, on peut prendre $U = L^\beta(\Omega)$ et

$$Y = W^{2,\beta}(\Omega) \cap W_0^{1,\beta}(\Omega).$$

En effet, $W^{2,\beta}(\Omega)$ est inclus dans $C^1(\bar{\Omega})$ si $\beta > n$. On peut donc prendre $Z = C(\bar{\Omega})^n$; $\mu \in Z'$ est le produit de n mesures de Borel régulières. L'état adjoint $\bar{p}$ est dans le dual de $L^\beta(\Omega)$, donc dans $L^{\beta'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\beta} = 1$. Nous pouvons alors remplacer (2.7) par

$$\int_\Omega \bar{p}\,\Delta z\,dx + \langle \bar{\mu}, \nabla z\rangle_{[C(\bar{\Omega})^n]'C(\bar{\Omega})^n} = 0,\ \forall z \in Y. \qquad □$$

Remarque 2.4

L'inégalité (2.9) est particulièrement riche en information si $K \cap U$ est dense dans K. Or, d'après la remarque 2.3, U contient $L^\beta(\Omega)$ pour $\beta > n$. If suffit donc de vérifier si $K \cap L^\beta(\Omega)(\beta > n)$ est dense dans K. Ceci est vrai en particulier si K est la boule unité de $L^2(\Omega)$ ou si

$$K = \{u \in L^2(\Omega),\ a \le u(x) \le b,\ \text{p.p. } x \in \Omega\}$$

avec $-\infty \le a \le b < +\infty$. □

Remarque 2.5

(i) Si $K = L^2(\Omega)$, (2.9) se réduit à $N\bar{u}+\bar{q}+\bar{p} = 0$ dans U'. Mais puisque U contient $L^\beta(\Omega)$ $(\beta > n)$, U est dense dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que si $K = L^2(\Omega)$, $\bar{p} \in L^2(\Omega)$.

Ceci est encore vérifié si u est un point interne de $K \cap U$.
(ii) Puisque U est dense dans $L^2(\Omega)$, Y est dense dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, donc dans $H_0^1(\Omega)$. On en déduit que si $\bar{\mu} \in L^2(\Omega)$, (2.7) équivaut à

$$- \Delta\bar{p} = - \operatorname{div} \bar{\mu} \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$
$$\bar{p} = 0,$$

équation qui a une solution dans $H_0^1(\Omega)$. □

Nous venons de voir comment le choix d'un cadre fonctionnel adapté aux contraintes permet d'exprimer les conditions d'optimalité d'un problème à critère convexe et équation d'état linéaire, par utilisation des résultats généraux de l'analyse convexe. Notons qu'un résultat abstrait dans le cas où le critère est seulement lipschitzien (l'équation d'état étant toujours linéaire) est donné dans J.P. Aubin, F. Clarke [3]. Le résultat abstrait du paragraphe suivant prend en compte le cas où l'équation d'état est non linéaire.

Remarque 2.6

Les seules hypothèques que nous utilisons concernant le convexe définissant les contraintes sur l'état sont le fait que ce soit un borné de $L^\infty(\Omega)^n$ et la condition de qualification. Ainsi, notre méthode permet de traiter le cas d'une contrainte $\nabla y_u(x) \in C(x)$, p.p. $x \in \Omega$, où $C(x)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, borné uniformément en x.
La condition de qualification est alors l'existence de $u \in K$ et $\xi > 0$ tels que la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre $\nabla y_u(x)$ et de rayon ξ soit incluse dans $C(x)$, pour presque tout x de Ω. □

III - UN RESULTAT ABSTRAIT D'EXISTENCE DE MULTIPLICATEUR

Donnons-nous

X, W des espaces de Banach,
K_1 un convexe fermé non vide de X,
K_2 un convexe fermé d'intérieur non vide de W,
f une application de X dans $\mathbb{R}$
g une application de X dans W.

Nous rappelons qu'une application $g : X \to W$ est strictement dérivable en x si (voir [9]) :

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \to 0}} \frac{g(y+tz) - g(y)}{t} = Dg(x)z,$$

où $Dg(x) \in \mathscr{L}(X,W)$, la convergence étant uniforme en y sur tout compact.

Remarque 3.1

Si g est continuement Gâteaux-différentiable en x, g est strictement dérivable en x (F.H. Clarke [15], p. 32). □

Considérons le problème

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \text{Min } f(x), \\ x \in K_1,\ g(x) \in K_2. \end{cases}$$

Nous notons ∂ le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe et ∂_c le gradient généralisé de F.H. Clarke [15].

Théorème 3.1

Soit $\bar{x}$ une solution de (3.1). Nous supposons que f (resp.g) est lipschitzienne (resp.strictement dérivable) au voisinage de $\bar{x}$. Alors il existe $\alpha \geq 0$ et $\lambda \in W'$ tels que

(3.2) $\alpha + ||\lambda||_{W'} > 0,$

(3.3) $<\lambda, w-g(\bar{x})>_{W'W} \leq 0, \ \forall w \in K_2,$

(3.4) $\alpha\partial_c f(\bar{x}) + [Dg(\bar{x})]^*\lambda + \partial I_{K_1}(\bar{x}) \ni 0$ dans X'.

Si de plus $g(\bar{x}) \in \overset{\circ}{K}_2$, la conclusion est obtenue avec $\alpha = 1$ et $\lambda \equiv 0$. □

Avant de démontrer le théorème, donnons un lemme.

Lemme 3.1

Soit K un convexe fermé de W tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. Soit l'application $\rho : W \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(w) = \inf \{\mu \geq 0 \ ; \ w \in \mu K\}.$$

Alors

(3.5) $\rho(tw) = t\,\rho(w), \ \forall t \geq 0, \ w \in W,$

(3.6) $\rho(w) \leq 1 \iff w \in K,$

(3.7) $\rho(w) < 1 \iff w \in \overset{\circ}{K}, \ \rho(w) = 1 \iff w \in \partial K.$

De plus ρ est sous-linéaire, convexe, lipschitzienne et

(3.8) $w \in \partial K \implies \partial\rho(w) \not\ni 0$ et $\partial\rho(w) \subset \partial I_K(w)$. □

Démonstration

On vérifie aisément que $\rho(w) < +\infty$ pour tout w et que ρ vérifie (3.5)-(3.7). Montrons que ρ est sous-linéaire. Soit w_1 et w_2 dans W, non nuls. Notons $\rho_1 = \rho(w_1)$, $\rho_2 = \rho(w_2)$. Alors $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$ dans K tels que

$$w_1 = (\rho_1+\varepsilon)\hat{w}_1, \ w_2 = (\rho_2+\varepsilon)\hat{w}_2.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho_1+\rho_2+2\varepsilon}\ (w_1+w_2) = \frac{\rho_1+\varepsilon}{\rho_1+\rho_2+2\varepsilon}\,\hat{w}_1 + \frac{\rho_2+\varepsilon}{\rho_1+\rho_2+2\varepsilon}\,\hat{w}_2$$

est dans K, soit $w_1 + w_2 \in (\rho_1 + \rho_2 + 2\varepsilon)K$ d'où

$$\rho(w_1 + w_2) \le \rho(w_1) + \rho(w_2) + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, il vient

(3.9) $$\rho(w_1 + w_2) \le \rho(w_1) + \rho(w_2),\ \forall w_1,w_2 \in W.$$

Avec (3.5), on en déduit que ρ est sous-linéaire et par conséquent convexe.

Montrons que ρ est lipschitzienne. Notons

$$B_W(0,r) = \{w \in W\ ;\ ||w||_W < r\}.$$

Il existe $r > 0$ tel que $B_W(0,r) \subset K$. On vérifie aisément que

$$\rho(w) \le \frac{1}{r}||w||_W.$$

De (3.9) on déduit (en changeant w_1 en w_1-w_2) :

$$\rho(w_1) - \rho(w_2) \le \rho(w_1 - w_2),\ \forall w_1,w_2 \in W,$$

d'où, en permutant w_1 et w_2 :

$$|\rho(w_1) - \rho(w_2)| \le \max\,\{\rho(w_1-w_2),\ \rho(w_2-w_1)\}$$
$$\le \frac{1}{r}||w_1 - w_2||_W.$$

Démontrons enfin (3.8). Soit $w_0 \in \partial K$ et $\lambda \in \partial\rho(w_0)$. Par définition

$$\rho(w) \geq \rho(w_0) + \langle\lambda, w-w_0\rangle \ , \ \forall w \in W.$$

Avec (3.7), ceci implique

$$\langle\lambda, w-w_0\rangle < 0, \ \forall w \in \overset{\circ}{K} \ ;$$

donc $||\lambda||_{W'} \neq 0$, et avec (3.6) il vient

$$\langle\lambda, w-w_0\rangle \leq 0, \ \forall w \in K,$$

d'où l'appartenance de λ à $\partial I_K(w)$. □

<u>Démonstration du théorème 3.1</u>

Soit w_0 dans $\overset{\circ}{K}_2$. On applique le lemme 3.1 avec

$$K = K_2 - w_0.$$

En raison de (3.6), il vient

$$\rho(w) \leq 1 \iff w \in K_2 - w_0,$$

donc

$$\rho(w-w_0) \leq 1 \iff w \in K_2.$$

Un problème équivalent à (3.1) est donc

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \text{Min } f(x), \\ \\ x \in K_1, \ \rho(g(w) - w_0) - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Puisque f et ρ sont lipschitzeinnes au voisinage de $\bar{x}$, on déduit d'un résultat de F.H. Clarke (cf. [14]) que si $\bar{x}$ est solution de (3.1), donc de (3.10), il existe $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tels que

(3.11) $\alpha + \beta > 0,\ \beta = 0$ si $\rho_{\hat{K}}(g(\bar{x})-w_0) < 1,$

et

$$\alpha\partial_c f(\bar{x}) + \beta\partial_c[\rho_{\hat{K}}(g(x)-w_0)] + \partial I_{K_1}(\bar{x}) \ni 0 \text{ dans } X^*.$$

Or $g(x)$ est strictement différentiable au voisinage de $\bar{x}$, et ρ est convexe et continue, donc régulière au sens de [15] ; d'où (cf. [15], p. 45)

$$\partial_c [\rho(g(\bar{x})-w_0)] = [D\, g(\bar{x})]^* \partial_c \rho(g(\bar{x})-w_0).$$

De plus, ρ étant convexe et lipschitzienne, $\partial_c\rho$ coïncide avec le sous différentiel de ρ ([15], p. 36) ; donc il existe $\lambda \in \partial\rho(g(\bar{x})-w_0)$ vérifiant (3.4), avec $\alpha = 1$ et $\lambda \equiv 0$ si $g(\bar{x}) \in \mathring{K}_2$. Si $g(\bar{x}) \in \partial K$, $\lambda \in \partial\rho(g(\bar{x})-w_0)$ est d'après (3.8) un élément non nul de ∂I_K en $g(\bar{x})-w_0$, donc de ∂I_{K_2} en $g(\bar{x})$; d'où (3.3) et, avec (3.11), (3.2).

La conclusion du théorème s'ensuit. □

Il est utile d'obtenir des conditions sous lesquelles le problème est normal, au sens où la conclusion du théorème 3.1 est obtenue avec $\alpha > 0$, même si $g(\bar{x}) \in \partial K_2$. Nous allons donner deux indications dans ce sens ; l'une est du type de la condition de Slater, qui concerne les problèmes convexes (cf. [16]) ; l'autre est obtenue en considérant un problème obtenu par une perturbation de K_2, et utilise les résultats de F.H. Clarke [14].

<u>Théorème 3.2</u>

(i) S'il existe $x_0 \in K_1$ tel que

(3.12) $g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x}) \in \mathring{K}_2,$

la conclusion du théorème 3.1 est obtenue avec $\alpha = 1$.

(ii) Considérons pour $\gamma \in \mathbb{R}^+$ le convexe perturbé

$$K_{2\gamma} = w_0 + \gamma(K_2 - w_0),$$

et soit la famille de problèmes

$$(3.13)_\gamma \qquad \begin{cases} \text{Min } f(x), \\ x \in K_1,\ g(x) \in K_{2\gamma}, \end{cases}$$

qui se réduit à (3.1) lorsque $\gamma = 1$. Soit a,b tels que $0 \leq a < b < +\infty$ et que le problème $(3.13)_\gamma$ possède au moins une solution si $\gamma \in [a,b[$. Alors, pour presque tout $\gamma \in [a,b[$, le problème (3.13) est normal. □

Démonstration

(i) Si α est nul, nous déduisons de (3.4) que, en particulier :

$$(3.14) \qquad \langle\lambda,\ Dg(\bar{x})\ (x_0-\bar{x})\rangle_{W'W} \geq 0.$$

D'autre part, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$||w||_W < \varepsilon \implies g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})\ (x_0-x) + w \in \overset{\circ}{K}_2,$$

donc avec (3.3)

$$\langle\lambda,\ Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x}) + w\rangle_{W'W} \leq 0,\ \forall w \in W, ||w||_W \leq \varepsilon ,$$

et puisque $||\lambda||_{W'} \neq 0$ d'après (3.2) il s'ensuit que

$$\langle\lambda,\ Dg(\bar{x})(x_0-\bar{x})\rangle_{W'W} < 0,$$

en contradiction avec (3.14).

(ii) Le problème $(3.13)_\gamma$ équivaut à

$$(3.15) \qquad \begin{cases} \text{Min } f(x), \\ x \in K_1,\ \rho_{\hat{K}}(g(\bar{x})-w_0) \leq \gamma. \end{cases}$$

Soit x_γ une solution de $(3.15)_\gamma$ et soit $\phi : [a,b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(\gamma) = f(x_\gamma).$$

La fonction ϕ est décroissante et finie en tout point. On déduit alors de F.H. Clarke [14], la normalité de $(3.15)_\gamma$ pour presque tout γ. En reprenant la démonstration du théorème 4.1, on vérifie que la normalité de $(3.13)_\gamma$ équivaut à celle de $(3.15)_\gamma$, d'où le théorème. $\square$

IV - UN PROBLEME A EQUATION D'ETAT NON LINEAIRE, DE TYPE ELLIPTIQUE

Soit Ω comme au paragraphe 2. Nous considérons un problème similaire à (2.2), dans lequel l'équation d'état est

$$(4.1) \qquad \begin{cases} -\Delta y + y^3 = u \text{ dans } \Omega, \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On vérifie aisément que, pour $u \in L^2(\Omega)$, (4.1) a une solution unique dans $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, espace identique à $H_0^1(\Omega)$ pour $n \leq 3$. Mais $-\Delta y = u-y^3$ est dans $L^2(\Omega)$ et y est donc dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Le critère J(u) étant défini par (2.2), nous posons le problème :

$$(4.2)_\delta \qquad \begin{cases} \text{Min } J(u), \\ u \in K,\ y_u \text{ (solution de (4.1)) telle que } \|\nabla y_u(x)\|_E \leq \delta \text{ p.p. } x \in \Omega . \end{cases}$$

L'espace Z et le convexe Z_δ sont définis comme au paragraphe 2. L'existence d'un contrôle optimal s'obtient sous les mêmes hypothèses que précédemment :

Théorème 4.1

On suppose qu'il existe un contrôle admissible et (2.4). Alors le problème (4.2) possède au moins un contrôle optimal $\bar{u}$. □

Démonstration

Soit $\{u_k\}$ une suite minimisante, et notons $y^n = y_{u^n}$. D'après (2.3), $\{u^n\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, d'où on déduit que y^n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc dans $L^6(\Omega)$ pour $n \leq 3$, et donc $(y^n)^3$ est borné dans $L^2(\Omega)$. Or $-\Delta y^n = u^n-(y^n)^3$, d'où on déduit que

$\{y^n\}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$. Pour $n \leq 3$, l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $C^0(\bar{\Omega})$, (l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, muni de la norme de $L^\infty(\Omega)$ qui en fait un espace de Banach) est compacte [1]. Il existe donc $(\bar{u},\bar{y}) \in L^2(\Omega) \times H^2$ tels que

$$\begin{array}{lll} u^n \rightharpoonup \bar{u} & L^2(\Omega) \text{ faible,} \\ y^n \rightharpoonup \bar{y} & H^2(\Omega) \text{ faible,} \\ y^n \to \bar{y} & C^0(\bar{\Omega}) \text{ fort.} \end{array}$$

Ceci permet le passage à la limite dans (3.1). Le convexe K (resp. Z_δ) étant faiblement fermé dans $L^2(\Omega)$ (resp. Z), $\bar{u}$ est un contrôle admissible. De la convexité de J par rapport au couple (u,y_u) on déduit que $J(\bar{u}) \leq \liminf J(u^n)$; $\bar{u}$ est donc solution de $(4.2)_\delta$. $\square$

En vue d'exprimer les conditions d'optimalité, il convient de choisir un cadre fonctionnel adapté. Nous allons voir -suivant en celà une idée de J.L. Lions [22]- que le cadre obtenu en retirant de (3.1) le terme non linéaire convient. Nous reprenons les espaces U et Y définis au paragraphe 2.

Lemme 4.1

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$u \in U \iff \nabla y_u(x) \in L^\infty(\Omega)^n. \quad \square$$

Démonstration

Soit $z_u \in H^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta z = u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ z = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Par définition, $u \in U$ équivaut à $\nabla z_u \in L^\infty(\Omega)^n$. Soit $w = z-y$. Alors

$$\begin{cases} -\Delta w = y^3 \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Mais pour $n \leq 3$, $H^2(\Omega)$ est inclus dans $C^0(\bar{\Omega})$ donc $\nabla(y^3) = 3y^2\nabla y$ est dans $[L^2(\Omega)]^n$ de sorte que y^3 est dans $H^1_0(\Omega)$. On en déduit que w est dans $H^3(\Omega)$, donc que $\nabla w \in C^0(\bar{\Omega})^n$. Donc $\nabla z_u \in L^\infty(\Omega)^n \Longleftrightarrow \nabla y_u \in L^\infty(\Omega)^n$, d'où le lemme. □

Nous allons préciser dans ce cadre la régularité de l'application $u \to y_u$.

<u>Proposition 4.1</u>

L'application

$$U \to Y,$$
$$u \to y_u \text{ solution de } (4.1),$$

est continûment différentiable. □

<u>Démonstration</u>

D'après le lemme 4.1, l'application est bien définie. Pour montrer qu'elle est différentiable, considérons

$$F : Y \times U \to U,$$
$$(y,u) \to -\Delta y + y^3 - u.$$

L'image de $Y \times U$ par F est bien dans U : en effet, par définition, Δy et u sont dans U et, de plus, la démonstration du lemme 4.1 montre que y^3 est dans U. On vérifie aisément que F est continûment différentiable. Vérifions que $\frac{\partial F}{\partial u}$ est un isomorphisme de Y sur U. Grâce au théorème de l'application ouverte, il suffit de montrer que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta z + 3y^2 z = v \text{ dans } U, \\ z = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

admet pour tout $v \in U$ une solution unique dans Y. Or l'opérateur linéaire

$$z \to -\Delta z + 3y^2 z$$

est continue de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ et coercif. Le lemma de Lax-Milgram implique donc l'existence de z unique dans $H_0^1(\Omega)$. Mais

$$-\Delta z = v - 3y^2 z \ ;$$

On vérifie que $3y^2 z \in H_0^1(\Omega) \subset U$; donc $z \in Y$. □

<u>Théorème 4.2</u>

On suppose l'hypothèse (2.3) vérifiée et on se donne $\delta_0 > 0$ tel que $(4.2)_{\delta_0}$ admette un contrôle admissible (donc un contrôle optimal).

(i) Soit $\delta \geq \delta_0$, $\bar{u}$ solution de $(4.2)_\delta$ (il en existe) et $\bar{y} = y_{\bar{u}}$. Il existe $\alpha \geq 0$, $\bar{\mu} \in Z'$, $\bar{q} \in H^2(\Omega)$, $\bar{p} \in U'$ tels que

(4.3) $$\alpha + ||\bar{p}||_{U'} > 0,$$

(4.4) $$\begin{cases} -\Delta\bar{q} + 3\bar{y}^2\bar{q} = \bar{y} - y_d \text{ dans } \Omega, \\ \bar{q} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

(4.5) $$\langle\bar{p}, -\Delta z + 3\bar{y}^2 z\rangle_{U'U} = \langle\bar{\mu}, \nabla z\rangle_{Z'Z}, \ \forall z \in Y$$

(4.6) $$\langle\bar{\mu}, z - \nabla\bar{y}\rangle_{Z'Z} \leq 0, \ \forall z \in Z_\delta,$$

et

(4.7) $$\alpha \int_\Omega (N\bar{u}+\bar{q})(v-\bar{u})dx + \langle\bar{p}, v-\bar{u}\rangle_{U'U} \geq 0, \ \forall v \in K \cap U.$$

Si de plus $\nabla\bar{y} \in \overset{\circ}{Z}_\delta$, on peut prendre $\alpha = 1$ et $\bar{\mu} = 0$.

(ii) Pour presque tout $\delta \geq \delta_0$, le problème $(3.2)_\delta$ (qui admet une solution) vérifie (3.3) à (3.7) avec $\alpha = 1$. □

Démonstration

i) Nous appliquons le théorème 3.1 avec

$$U = X,$$
$$Z = W,$$
$$K = K_1,$$
$$Z_\delta = K_2,$$
$$J = f,$$
$$g : \text{application } u \to \nabla y_u.$$

Puisque l'intérieur de Z_δ dans Z n'est pas vide, du théorème (4.1) on déduit les égalités (4.4) à (4.7) avec

$$\alpha + ||\bar{\mu}||_{Z'} > 0.$$

Montrons que (4.3) est également vérifié. Si ce n'est pas le cas, $\bar{p} = 0$, donc d'après (4.5) $<\bar{\mu},\bar{y}> = 0$. De (4.6) on déduit alors que

$$<\bar{\mu},z> \leq 0, \forall z \in Z_\delta.$$

Or Z_δ est la boule de rayon δ de Z, donc $\bar{\mu} = 0$ ce qui est impossible.

ii) Le résultat est une application directe du théorème 3.2. □

Remarque 4.1

(i) Les remarques 2.3, 2.4, 2.5 se transposent au problème étudié ici.

(ii) Dans les problèmes suivants on introduira également un paramètre δ tel que, si le problème admet une solution pour tout $\delta > \delta_0$, il est normal pour presque tout $\delta > \delta_0$, mais ce résultat ne sera pas répété.

(iii) L'équation d'état linéarisée établissant un isomorphisme entre U et Y, on déduit du point (i) du théorème 3.2 que si u est un point interne à $K \cap U$, le problème est qualifié ($\alpha = 1$). En particulier, le problème est qualifié s'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle. □

V - DEUX PROBLEMES A EQUATION D'ETAT NON LINEAIRE, DE TYPE ELLIPTIQUE, AVEC CONTROLE ET CONTRAINTE SUR L'ETAT AU BORD

Nous considérons d'abord le cas du contrôle par la condition de Neumann, avec des contraintes sur la trace de l'état sur Γ, puis le cas du contrôle par la condition de Dirichlet, avec des contraintes sur la dérivée normale au bord de l'état.

Soit le système régi par

$$(5.1) \qquad \begin{cases} -\Delta y + y + y^3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où u est dans $L^2(\Gamma)$. Vérifions que (5.1) admet une solution dans $H^{3/2}(\Omega)$. Multipliant (5.1) par $z \in H^1(\Omega)$ et intégrant par parties, il vient

$$\int_\Omega \nabla y \nabla z \, dx + \int_\Omega (y+y^3) z \, dx = \int_\Gamma u \, z \, d\gamma, \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Or l'opérateur $A : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$ défini par

$$\langle Ay, z \rangle_{H^1(\Omega)' H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla y \nabla z \, dx + \int_\Omega (y+y^3) z \, dx$$

est continu, monotone et coercif de $H^1(\Omega)$ vers $H^1(\Omega)'$; (5.1) a donc une solution unique dans $H^1(\Omega)$. L'application

$$\frac{\partial}{\partial n} : \{y \in L^2(\Omega) \; ; \; \Delta y \in L^2(\Omega)\} \to H^{-3/2}(\Gamma)$$

est continue (J.L. Lions, E. Magenes [24]). Il s'ensuit que y vérifie

$$(5.2) \qquad \begin{cases} -\Delta y + y = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $f = - y^3$ est, d'après le théorème de Sobolev, dans $L^2(\Omega)$ (puisque $n \le 3$). De (5.2) on déduit (J.L. Lions, E. Magenes [24]) que y est dans $H^{3/2}(\Omega)$.

Notons y_u la solution de (5.1). Soit $N \geq 0$, $y_d \in L^2(\Gamma)$ donnés et

$$J(u) = \frac{N}{2} \int_\Gamma u^2 \, d\gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma (y_u - y_d)^2 \, d\gamma .$$

Soit K un convexe fermé de $L^2(\Gamma)$ et $\delta > 0$. Le premier problème est

$$(5.3)_\delta \qquad \begin{cases} \text{Min } J(u), \\ u \in K, \ |y_u(\gamma)| \leq \delta \quad , \text{ p.p. } \gamma \in \Gamma . \end{cases}$$

Théorème 5.1

On suppose qu'il existe un contrôle admissible et que

(5.4) $\qquad N > 0$ ou K est borné dans $L^2(\Gamma)$.

Alors le problème $(5.3)_\delta$ admet au moins une solution. $\square$

Démonstration

L'infimum de $(5.3)_\delta$ est fini et une suite minimisante $\{u^n\}$ est bornée dans $L^2(\Gamma)$ d'après (5.4), donc $y^n = y_{u^n}$ est bornée dans $H^{3/2}(\Omega)$. Il existe donc $(\bar{u},\bar{y}) \in L^2(\Gamma) \times H^{3/2}(\Omega)$ tels que pour une sous suite, avec (5.1) :

$$\begin{array}{ll} u^n \rightharpoonup \bar{u} & L^2(\Gamma) \text{ faible}, \\ y^n \rightharpoonup \bar{y} & H^{3/2}(\Omega) \text{ faible}, \\ \Delta y^n \to \Delta \bar{y} & L^2(\Omega) \text{ faible} ; \end{array}$$

d'où

$$\bar{u} \in K,$$

$$|\bar{y}(\gamma)| \leq \delta, \text{ p.p. } \gamma \in \Gamma ,$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial n} = \bar{u} \text{ sur } \Gamma.$$

Reste à passer à la limite dans l'équation d'état. Pour $n \leq 3$, l'injection de $H^{3/2}(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ est compacte donc

$$(y^n)^3 \to (\bar{y})^3 \quad L^2(\Omega) \text{ fort ;}$$

d'où $\bar{y} = y_{\bar{u}}$. De plus, J est convexe continue donc f.s.c.i. par rapport au couple (u,y) ; on en déduit que $\bar{u}$ est un contrôle optimal. $\square$

Nous passons maintenant à l'expression des conditions d'optimalité. Notons z_u la solution unique dans $H^{3/2}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta z + z = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

et posons

$$U = \{u \in L^2(\Gamma) : z_{u_{|\Gamma}} \in L^\infty(\Gamma)\},$$

$$Y = \{y \in H^{3/2}(\Omega),\ \Delta y \in L^2(\Omega),\ y_{|\Gamma} \in L^\infty(\Gamma)\},$$

et

$$(5.6) \quad \begin{cases} Z = L^\infty(\Gamma), \\ Z_\delta = \{z \in Z,\ |z(\gamma)| \leq \delta, \quad \text{p.p. } \gamma \in \Gamma\} \end{cases} .$$

Munis de la norme du graphe, U et Y sont des espaces de Banach.

<u>Théorème 5.2</u>

Soit $\delta > 0$ et une solution de $(5.3)_\delta$. Il existe $\alpha \geq 0$, $\bar{\mu} \in Z'$, $\bar{q} \in H^{3/2}(\Omega)$, $\bar{p} \in L^2(\Omega)$, $\bar{r} \in U'$ tels que

(5.7) $\alpha + ||\bar{r}||_{U'} > 0,$

(5.8) $\begin{cases} -\Delta\bar{q} + \bar{q} + 3\bar{y}^2\,\bar{q} = 0 \text{ dans } \Omega , \\ -\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial n} = \bar{y} - y_d \text{ sur } \Gamma , \end{cases}$

(5.9) $\int_\Omega \bar{p}(-\Delta z+z+3\bar{y}^2 z)dx + \langle\bar{r}, \frac{\partial z}{\partial n}\rangle_{U'U} = \langle\bar{\mu}, z\rangle_{Z'Z} \quad , \forall z \in Y,$

(5.10) $\langle\bar{\mu}, z-\bar{y}\rangle_{Z'Z} \leq 0, \ \forall z \in Z_\delta,$

et

(5.11) $\alpha \int_\Gamma (N\bar{u}-\bar{q})(v-\bar{u})dx + \langle\bar{r}, v-\bar{u}\rangle_{U'U} \geq 0, \ \forall v \in K \cap U.$ □

Remarque 5.1

(i) On vérifie que pour tout $z \in Y$, $-\Delta z + z + 3\bar{y}^2 z$ est dans $L^2(\Omega)$ et (5.9) a donc un sens. On verra dans la démonstration que pour tout $\bar{\mu}$ donné dans $L^\infty(\Gamma)'$, (5.9) a une solution unique $(\bar{p},\bar{r})$ dans $L^2(\Omega) \times U'$.

(ii) On peut éviter de faire apparaître $\bar{p}$ dans l'énoncé du théorème 5.2 en remplaçant (5.9) par

$$\langle\bar{r}, \frac{\partial z}{\partial n}\rangle_{U'U} = \langle\bar{\mu}, z\rangle_{Z'Z} \ , \ \forall z \in Y \ ; \ -\Delta z + z + 3\bar{y}^2 z \equiv 0. \quad □$$

Démonstration du théorème 5.2

Dans un premier temps, montrons que l'application $u \to y_u$ est de classe C^1 de U vers Y en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'application

$$F : Y \times U \to L^2(\Omega) \times U$$

$$(y,u) \to (-\Delta y + y + y^3, \frac{\partial y}{\partial n} - u).$$

Un élément de Y a une dérivée normale dans $L^2(\Gamma)$, l'application $y \to \frac{\partial y}{\partial n}$ étant continue de Y vers $L^2(\Gamma)$ (J.L. Lions, F. Magenes [24]). D'autre part, $H^{3/2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$

pour tout $p > 1$ (si $n \leq 3$) donc y^3 est bien dans $L^2(\Omega)$. Pour montrer que $\frac{\partial y}{\partial n} = v$ est dans U, il suffit de vérifier que $w = z_v - y$ a une trace dans $L^\infty(\Gamma)$; w est solution de

$$\begin{cases} -\Delta w + w = \Delta y - y = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Puisque $f \in L^2(\Omega)$, w est dans $H^2(\Omega)$ et $w_{|\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma) \subset C(\Gamma)$.

L'image de F est donc bien dans $L^2(\Omega) \times U$ et on vérifie aisément que F est de classe C^1. Montrons que l'équation

$$(5.12) \qquad \begin{cases} -\Delta z + z + 3y^2 z = f \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial z}{\partial n} = v \text{ dans } U, \end{cases}$$

a une solution unique dans Y. L'équation (5.12) a une solution unique dans $H^1(\Omega)$; on peut écrire $z = z_1 + z_2$ avec

$$\begin{cases} -\Delta z_1 + z_1 = f - 3y^2 z \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial n}1 = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta z_2 + z_2 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial n}2 = v \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Or z_1 est dans $H^2(\Omega)$, donc sa trace sur Γ est dans $H^{3/2}(\Gamma) \subset C(\Gamma)$, et z_2 est dans Y par définition de U. Donc $z = z_1 + z_2$ est dans Y.

Nous appliquons maintenant le théorème 3.1. Il existe α, $\bar{\mu}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ vérifiant (5.8) (5.10)(5.11) et

(5.13) $\alpha + ||\bar{\mu}||_{Z'} > 0,$

(5.14) $<\bar{r},v>_{U'U} = <\bar{\mu},z>_{Z'Z}$, $\forall v \in U,$

où z est la fonction de v donnée par

$$(5.15) \quad \begin{cases} -\Delta z + z + 3\bar{y}^2 z = 0 \text{ dans } \Omega , \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = v \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On a vérifié en démontrant le théorème des fonctions implicites que l'application

$$\begin{cases} Y \to L^2(\Omega) \times U, \\ z \to (-\Delta z + z + 3\bar{y}^2 z \, , \, \dfrac{\partial z}{\partial n}), \end{cases}$$

est bijective. L'opérateur adjoint est donc aussi bijectif, d'où l'existence de $(\bar{p}_1, \bar{r}_1)$ solution de (5.9). Mais si z vérifie (5.15), (5.9) se réduit à (5.14), d'où $\bar{r}_1 = \bar{r}$. Démontrons (5.7).

Si $\alpha \neq 0$, le résultat est évident. Si $\alpha = 0$, montrons que $<\bar{\mu},\bar{y}>$ est non nul. L'inéquation (5.10) s'écrit

$$<\bar{\mu}, z> \ \leq \ <\bar{\mu},\bar{y}> \quad , \quad \forall z \in Z_\delta .$$

Puisque $\bar{\mu} \not\equiv 0$ d'après (5.13), il existe $z \in Z_\delta$ tel que $<\bar{\mu},z> \ > \ 0$, d'où

$$<\bar{\mu},\bar{y}> \ > 0.$$

Soit z la solution de

$$\begin{cases} -\Delta z + z + 3\bar{y}^2 z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ z = \bar{y} \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On vérifie aisément que $z \in H^{3/2}(\Omega)$ et que $w = z-y$ est dans $H^2(\Omega)$, d'où $\frac{\partial w}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma) \subset U$ et $\frac{\partial z}{\partial n} \in U$. Il suffit alors d'appliquer (5.9) à z pour obtenir la conclusion. $\square$

Remarque 5.2

(i) On sait (S. Agmon, A.Douglis, L. Nirenberg [2]) que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta z + z = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec $f \in L^{\beta}(\Omega)$ et $u \in W^{1-1/\beta,\beta}(\Omega)$, admet une solution unique dans $W^{2,\beta}(\Omega)$, dont la trace sur Γ est dans $W^{2-1/\beta,\beta}(\Gamma)$, espace inclus dans $C(\Gamma)$ dès que $\beta > \beta_0 = n/2$ soit $\beta_0 = 3/2$ pour $n = 3$. Donc si $\beta > 3/2$, $W^{1-1/\beta,\beta}(\Gamma)$ est inclus dans U ; d'où la densité de U dans $L^2(\Gamma)$.

Nous en déduisons l'analogue des remarques 2.3, 2.4,2.5 et en particulier le fait que si $K = L^2(\Gamma)$, $\bar{r}$ s'identifie à une élément de $L^2(\Gamma)$. Notons que le point (i) du théorème 3.2 s'applique alors et on peut donc prendre la constante α égale à 1.

(ii) Si $n = 2$, on a un peu plus : la trace de y est dans $H^1(\Gamma)$ qui est inclus dans $C(\Gamma)$. Alors on peut prendre $U = L^2(\Gamma)$; $\bar{r}$ est dans $L^2(\Gamma)$ et $\bar{\mu}$ est une mesure de Borel régulière. $\square$

Nous étudions maintenant le problème suivant. L'équation d'état est

$$\text{(5.16)} \qquad \begin{cases} -\Delta y + y^3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $u \in L^2(\Gamma)$. On se restreint aux solutions de (5.16) appartenant à $L^6(\Omega)$. Le laplacien de y étant dans $L^2(\Omega)$, sa trace sur Γ est bien définie. Introduisons l'équation linéaire

$$\text{(5.17)} \qquad \begin{cases} -\Delta z = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z = u \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

dont la solution sera notée z_u, et l'espace

$$U_1 = \{u \in L^2(\Gamma),\ z_u \in L^6(\Omega)\},$$

qui, muni de la norme du graphe, est un espace de Banach. Notons que, d'après le principe du maximum, V_1 contient $L^\infty(\Gamma)$[1].

Proposition 5.1

L'équation (5.16) admet une solution dans $L^6(\Omega)$ si et seulement si u appartient à U_1 ; de plus, cette solution est unique. □

Démonstration

Supposons que y_u existe, et posons $w = y_u - z_u$; w vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w = -(y_u)^3 \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme $(y_u)^3$ est dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que w_u est dans $H^2(\Omega)$, donc $(n \leq 3)$ dans $C(\Omega)$; donc $z_u = y_u - w$ est dans $L^6(\Omega)$, d'où $u \in U_1$. Réciproquement, si $u \in U_1$, (5.16) équivaut à

$$(5.18) \qquad \begin{cases} -\Delta w + (z_u + w)^3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

et $y_u = z_u + w$. On vérifie aisément que puisque z_u est dans $L^6(\Omega)$, (5.18) admet une solution dans $H^2(\Omega)$; (5.16) admet donc une solution dans $L^6(\Omega)$.

Montrons l'unicité de y_u : soit $\hat{y}_u$ une autre solution de (5.16). Alors $w = y_u - \hat{y}_u$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w + ((y_u)^2 + y_u\hat{y}_u + (\hat{y}_u)^2)w = 0 \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

d'où on déduit que w est nul. □

---

(1) Pour $n \leq 3$, V_1 contient aussi $H^{1/2}(\Gamma)$. Les inclusions $L^\infty(\Omega) \subset V_1$ et $H^{1/2}(\Gamma) \overset{n\leq 3}{\subset} V$, sont strictes.

L'espace U_1 est un espace "naturel" pour les contrôles ; mais nous allons voir que la contrainte sur l'état impose de choisir un espace plus petit. Nous introduisons le critère

$$J(u) = \frac{N}{2}\int_\Gamma u^2(\gamma)d\gamma + \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial y_u}{\partial n} - y_d\right)^2 d\gamma,$$

où $N \geq 0$ et $y_d \in L^2(\Gamma)$ sont donnés. Soit K un convexe fermé de $L^2(\Gamma)$; le problème est, pour $\delta \geq 0$:

$$(5.19)_\delta \quad \begin{cases} \min J(u), \\ u \in K, \ \left|\frac{\partial y_u}{\partial n}(\gamma)\right| \leq \delta \ , \text{ p.p. } \gamma \in \Gamma \ . \end{cases}$$

Le laplacien de y étant dans $L^2(\Omega)$, sa dérivée normale au bord est bien définie (c'est-à-priori un élément de $H^{-1}(\Gamma)$ donc $(5.19)_\delta$ a un sens. L'existence d'un contrôle optimal est obtenue sans hypothèse sur N et K :

Théorème 5.3

Si le problème $(5.19)_\delta$ a un contrôle admissible, il a (au moins) une solution. □

Démonstration

Soit $\{u^n\}$ une suite minimisante et $y^n = y_{u^n}$. Posons $\nu^n = \frac{\partial y_n}{\partial n}$; nécessairement ν^n est bornée dans $L^2(\Gamma)$. Puisque $-\Delta y^n \in L^2(\Omega)$ et $y^n \in L^6(\Omega)$, on peut multiplier l'équation d'état par y^n et intégrer par parties, d'où

$$\int_\Omega (\nabla y^n)^2 dx + \int_\Omega (y^n)^4 dx = \int_\Gamma \nu^n y^n d\gamma,$$

d'où ou déduit en particulier que $\{y^n\}$ est borné dans $H^1(\Omega)$, donc dans $L^6(\Omega)$ (pour $n \leq 3$). Donc y^n vérifie

$$\begin{cases} -\Delta y^n = f^n \text{ dans } \Omega \ , \\ \frac{\partial y^n}{\partial n} = \nu^n \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où (f^n, ν^n) est bornée dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$; il s'ensuit [24] que $\{y^n\}$ est bornée dans $H^{3/2}(\Omega)$. Les applications

$$H^{3/2}(\Omega) \to L^6(\Omega), \quad y \to y,$$

$$H^{3/2}(\Omega) \to L^2(\Gamma), \quad y \to y_{|\Gamma} ,$$

étant compactes $(n \leq 3)$, on en déduit l'existence de $(\bar{u},\bar{y}, \bar{\nu})$ dans $L^2(\Gamma) \times H^{3/2}(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, tels que pour une sous-suite :

$$\begin{array}{ll} y^n \rightharpoonup \bar{y} & H^{3/2}(\Omega) \text{ faible,} \\ (y^n)^3 \to (\bar{y})^3 & L^2(\Omega) \text{ fort,} \\ u^n \to \bar{u} & L^2(\Gamma) \text{ fort,} \\ \nu^n \rightharpoonup \bar{\nu} & L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array}$$

On en déduit que $\bar{y} = y_{\bar{u}}$ et que $\bar{u}$ est un contrôle admissible. La convexité de J par rapport au couple (u,y) permet de vérifier que $\bar{u}$ est optimal. □

Remarque 5.3

On n'a pas utilisé la contrainte sur l'état pour obtenir des estimations supplémentaires sur la suite minimisante. De fait, le théorème 5.3 est encore valable en l'absence de contraintes sur l'état $(\delta = +\infty)$. □

Nous introduisons maintenant un cadre fonctionnel prenant en compte la contrainte sur l'état. On rappelle que pour $u \in L^2(\Omega)$, z_u est la solution de (5.17). Définissons

$$U = \{u \in H^1(\Gamma) \ ; \ \frac{\partial z_u}{\partial n} \in L^\infty(\Gamma)\}.$$

On a vu dans la démonstration du théorème 5.3 qu'un état admissible est dans $H^{3/2}(\Omega)$; l'application $y \to y_{|\Gamma}$ étant continue de $H^{3/2}(\Omega)$ vers $H^1(\Gamma)$, il s'ensuit qu'un contrôle admissible est dans $H^1(\Gamma)$. Ceci justifie la définition de U. Soit d'autre part $s > n$ (on exclut le cas n=1, trivial). Nous choisissons

$$Y = \{y \in H^{3/2}(\Omega) \ ; \ \Delta y \in L^s(\Omega) \ ; \ \frac{\partial y}{\partial n} \in L^\infty(\Gamma)\}.$$

La définition de Y découle du souci d'obtenir l'état adjoint dans un espace concret (voir la remarque 5.2). Le choix de $L^s(\Omega)$, avec $s > n$, est dû aux formules d'inclusions d'espaces de Sobolev (voir (5.22)). Munis de la norme du graphe U et Y sont des espaces de Banach. Les ensembles Z et Z_δ sont définis comme en (5.6).

Proposition 5.2

Pour tout $u \in U$, (5.16) a une solution unique y_u dans Y et l'application $u \to y_u$ est de classe C^1 de U vers Y. □

Démonstration de la proposition 5.1

Nous appliquons le théorème des fonctions implicites à l'application

$$F : Y \times U \to L^s(\Omega) \times U,$$
$$(y,u) \to (-\Delta y + y^3,\ y_{|\Gamma} - u).$$

Puisque $Y \subset H^{3/2}(\Omega)$, y est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$, donc y^3 est dans $L^s(\Omega)$. De la définition de Y et U, on déduit que l'image de F est bien dans $L^s(\Omega) \times U$ et que F est de classe C^1. Etudions l'équation

$$(5.20) \qquad \begin{cases} -\Delta z + 3y^2 z = f \text{ dans } \Omega , \\ z = v \text{ sur } \Gamma , \end{cases}$$

où (v,f,y) est donné dans $U \times L^s(\Omega) \times Y$. Soit l'équation

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ dans } \Omega , \\ w = v \text{ sur } \Gamma . \end{cases}$$

Cette équation admet une solution unique dans Y. Posons $\tilde{w} = z-w$; (5.20) équivaut à

$$(5.21)\qquad \begin{cases} -\Delta\tilde{w} + 3y^2\,\tilde{w} = f - 3y^2\, w \text{ dans } \Omega\,, \\ \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Posons $f_1 = f - 3y^2w$. On vérifie aisément que $f_1 \in L^s(\Omega)$ et que (5.21) a une solution unique $\tilde{w}$ dans $H^1(\Omega)$. Il vient alors

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{w} = f_1 - 3y^2\tilde{w} \\ \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Or $y \in H^{3/2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\forall p > 0$ $(n \leq 3)$ et $\tilde{w} \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ $(n \leq 3)$ donc [1] $3y^2\tilde{w} \in L^s(\Omega)$ et donc $-\Delta\tilde{w} \in L^s(\Omega)$, d'où [2] $\tilde{w} \in W^{2,s}(\Omega)$ et $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial n} \in W^{1-1/s,s}(\Gamma)$. Or (R.A. Adams [1])

$$(5.22)\qquad W^{1-1/s,s}(\Gamma) \subset C(\Gamma) \text{ si } s > n.$$

Donc $\tilde{w}$ est dans Y, et aussi $z = \tilde{w}+w$. On a prouvé que (5.20) admet une solution unique dans Y. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc. □

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer les conditions d'optimalité de $(5.12)_\delta$. Soit s' tel que $1/s + 1/s' = 1$.

<u>Théorème 5.4</u>

Soit $\bar{u}$ une solution de $(5.12)_\delta$. Il existe $\alpha \geq 0$, $\bar{\mu} \in Z'$, $\bar{q} \in H^{1/2}(\Omega)$, $\bar{p} \in L^{s'}(\Omega)$, $\bar{r} \in U'$ tels que

$$(5.23)\qquad \alpha + ||\bar{r}||_{U'} > 0,$$

$$(5.24)\qquad \begin{cases} -\Delta\bar{q} + 3\bar{y}^2\bar{q} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \bar{q} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial n} - y_d \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

---

(1) Par bootstrapping si $s \geq 6$.

$$(5.25)\qquad \int_\Omega \bar{p}\,(-\Delta z + 3\bar{y}^2 z)\,dx + \langle \bar{r}, z\rangle_{U'U} = \langle \bar{\mu}, \frac{\partial z}{\partial n}\rangle\ ,\ \forall z \in Y,$$

$$(5.26)\qquad \langle \bar{\mu}, z - \frac{\partial \bar{y}}{\partial n}\rangle \le 0,\ \forall z \in Z_\delta,$$

$$(5.27)\qquad \alpha \int_\Gamma (N\bar{u} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial n})(v-\bar{u}) + \langle \bar{r}, v-\bar{u}\rangle \ \ge 0,\ \forall v \in K \cap U. \qquad \square$$

La démonstration du théorème 5.4 est similaire à celle du théorème 5.2 ; nous l'omettons donc.

Remarque 5.4

Si $u \in W^{2-1/\beta,\beta}(\Gamma)$, la solution z de (5.17) est dans $W^{2,\beta}(\Gamma)$ (cf. [2]) et admet donc une dérivée normale dans $W^{1-1/\beta,\beta}(\Gamma)$, espace inclus dans $C(\Gamma)$ si $\beta > n$. On en déduit que U est dense dans $L^2(\Gamma)$, d'où l'analogue des remarques 2.3, 2.4, 2.5 et en particulier $\bar{r} \in L^2(\Gamma)$ si $K = L^2(\Gamma)$. $\square$

Remarque 5.5

Le problème précédent peut être vu comme un problème de contrôle par les conditions de Neumann (appelons les v) avec la contrainte sur le contrôle $||v||_{L^\infty(\Gamma)} \le \delta$ et la contrainte sur l'état $y_{|\Gamma} \in K$, l'intérieur de K pouvant être vide. Dans le cas où K est borné dans un espace convenable et où l'intérieur de K n'est pas vide, on peut exprimer, à l'aide du théorème 3.1, d'autres conditions d'optimalité qui ne coincident pas avec (5.23)-(5.27), les espaces étant différents. $\square$

VI - CONTRÔLE D'UN SYSTEME DE TYPE REACTION DIFFUSION AVEC CONTRAINTE SUR L'ETAT FINAL

Ici encore, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, de frontière Γ régulière. Soit $T > 0$, on note :

$$Q = \Omega \times]0,T[\ ,$$
$$\Sigma = \Gamma \times]0,T[\ .$$

Nous considérons le système ($y = y(x,t)$, $u = u(x,t)$)

$$(6.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - \Delta y - y^3 = u \text{ dans } Q, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x), \end{cases}$$

où $u \in L^2(Q)$ et $y_0(x)$ est dans $H_0^1(\Omega)$. Nous cherchons des solutions de (6.1) dans $H^{2,1}(Q)$. Nous rappelons que, pour $p > 1$:

$$W^{2,1;p}(Q) = W^{1,p}(Q) \cap L^p(0,T,W^{2,p}(\Omega)).$$

On note $H^{2,1}(Q) = W^{2,1;2}(Q)$.

Le système 6.1 admet une solution dans $H^{2,1}(\Omega \times [0,t])$, pour t petit (H. Ishii [18]), mais n'admet pas nécessairement de solution globale.

Définissons

$$\mathcal{O} = \{u \in L^2(Q) \ ; \ (6.1) \text{ a une solution (ou moins) dans } H^{2,1}(Q)\}.$$

Le théorème suivant est démontré dans [6] (voir aussi [7]) :

Théorème 6.1

L'ensemble $\mathcal{O}$ est un ouvert connexe non vide de $L^2(Q)$. Dans $\mathcal{O}$, l'application $u \to y_u$ (solution de (6.1)) est univoque et de classe C^1 de $\mathcal{O}$ vers $H^{2,1}(Q)$. □

La démonstration du théorème 6.1, basée sur le théorème des fonctions implicites, emploie en particulier le lemme suivant, que nous utilisons plus loin.

Lemme 6.1

Soit $q \in L^\infty(0,T,L^3(\Omega))$, $f \in L^2(Q)$, $h \in H_0^1(\Omega)$. Alors l'équation

$$(6.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} - \Delta z + qz = f \text{ dans } Q, \\ \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma \ , \\ \\ z(x,0) = h(x), \text{ p.p.} x \in \Omega \ , \end{cases}$$

a une solution unique dans $H^{2,1}(Q)$. □

Soit $N \geq 0$ et $y_d \in L^6(Q)$. Le critère est

$$J(u) = \begin{cases} \dfrac{N}{2} \displaystyle\int_Q u^2 \, dx \, dt + \dfrac{1}{6} \int_Q (y_u - y_d)^6 \, dx \, dt \text{ si } u \in \mathcal{O} \ , \\ \\ + \infty \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit K un convexe fermé de $L^2(Q)$ et $\delta > 0$. Nous posons le problème

$$(6.3) \qquad \begin{cases} \text{Min } J(u), \\ \\ u \in K \cap \mathcal{O} \ , \ |y_u(x,T)| \leq \delta \ , \text{ p.p. } X \in \Omega \ . \end{cases}$$

Notons que y étant dans $H^{2,1}(Q)$, y est dans $C(0,T,H^1(\Omega))$ $(n \leq 3)$ donc la contrainte sur l'état a un sens.

Théorème 6.2.

On suppose l'existence d'un contrôle admissible pour (6.3) (un élément u_0 de $K \cap \mathcal{O}$ tel que y_{u_0} vérifie la contrainte sur l'état) et

$$N > 0 \text{ ou } K \text{ est borné dans } L^2(\Omega).$$

Alors le problème (6.3) admet au moins un contrôle optimal. □

Démonstration

Soit $\{u_n\}$ une suite minimisante et $y^n = y_{u^n}$. Nécessairement $\{(u^n,y^n)\}$ est borné dans $L^2(Q) \times L^6(Q)$, d'où, avec (6.1) :

$$\frac{dy^n}{dt} - \Delta y^n \text{ borné dans } L^2(Q).$$

On en déduit que $\{y^n\}$ est bornée dans $H^{2,1}(Q)$, et qu'il existe $(\bar{u},\bar{y}) \in L^2(Q) \times H^{2,1}(Q)$ tels que

$$\begin{array}{ll} u^n \rightharpoonup \bar{u} & L^2(Q) \text{ faible,} \\ y^n \rightharpoonup \bar{y} & H^{2,1}(Q) \text{ faible.} \end{array}$$

Le passage à la limite dans l'équation s'effectue par les mêmes technique que précédemment, en utilisant la compacité de l'injection de $H^{2,1}(Q)$ dans $L^6(Q)$ pour $n \leq 3$ ([23] p. 40) ; on vérifie que $\bar{u}$ est admissible et on déduit de la convexité de J par rapport à (u,y) que $\bar{u}$ est optimal. □

Nous choisissons maintenant un cadre fonctionnel. Soit z_u la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} - \Delta z = u \text{ dans } Q, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma , \\ z(x,0) = 0, \ \forall x \in \Omega . \end{cases}$$

Pour tout $u \in L^2(Q)$, il existe z_u unique dans $H^{2,1}(Q)$. Définissons

$U = \{u \in L^2(Q) \; ; \; z_u(.,T) \in L^\infty(\Omega)\}$,

$Y = \{y \in H^{2,1}(Q) \; ; \; y \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \; y(.,T) \in L^\infty(\Omega)\}$.

Ces espaces sont munis de la norme du graphe qui en fait des Banach. Nous posons

$$Z = L^\infty(\Omega),$$
$$Z_\delta = \{z \in Z \; ; \; |z(x)| \leq \delta, \text{ p.p. } x \in \Omega\} \quad ,$$
$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \cap U.$$

Dans la suite, on utilise l'inclusion suivante (voir [23]) :

(6.4) $\qquad H^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ si $n \leq 3$.

Proposition 6.1

L'ensemble $\mathcal{O}_1$ est un ouvert connexe non vide de U, et l'application $u \to y_u$ est de classe C^1 de $\mathcal{O}_1$ vers Y. $\square$

Démonstration

Appliquons le théorème des fonctions implicites à

$$F : Y \times U \to U \times H_0^1(\Omega),$$
$$(y,u) \to (\frac{dy}{dt} - \Delta y - y^3 - u, \; y(0) - y_0(x)).$$

D'après (6.4), $v = y^3$ est dans $L^{10/3}(Q)$; d'après [23], il vient donc $z_v \in W^{2,1;10/3}(Q)$, donc (J.L. Lions [23] p. 39), $z_v(.,T) \in B^{2(1-3/10),10/3}(\Omega)$; ce dernier espace est inclus dans $C(\bar{\Omega})$. L'image de F est donc bien dans $U \times H_0^1(\Omega)$, et on vérifie que F est de classe C^1. Montrons que l'équation

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} - \Delta z - 3y^2 z = f \text{ dans } U, \\ z \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ z(.,0) = h \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

admet, si $(y,f,h) \in Y \times U \times H_0^1(\Omega)$, une solution unique dans Y. Or, si $n \leq 3$:

$$H^{2,1}(Q) \subset C(0,T,H^1(\Omega)) \subset C(0,T,L^6(\Omega)),$$

donc y^2 est dans $L^\infty(0,T,L^3(\Omega))$. D'après le lemme 6.1, l'équation (6.5) a donc une solution unique $z \in H^{2,1}(Q)$. Mais

$$(6.6)\qquad \frac{dz}{dt} - \Delta y = f + 3y^2 z \text{ dans } Q .$$

D'après (6.4), $3y^2z$ est dans $L^{10/3}(Q)$, donc dans U ; le second membre de (6.6) est donc dans U, donc $z \in Y$. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc d'où la proposition. □

Nous utiliserons l'espace

$$Y_0 = \{y \in Y \ ; \ y(.,0) \equiv 0\}.$$

Voici l'expression des conditions d'optimalité :

Théorème 6.3

Soit $\bar{u}$ un contrôle optimal et $\bar{y} = y_{\bar{u}}$. Alors il existe $\alpha \geq 0$, $\bar{q} \in W^{2,1;6/5}(\Omega)$, $\bar{p} \in U'$, $\bar{\mu} \in L^\infty(\Omega)'$ tels que

$$(6.7)\qquad \alpha + ||\bar{p}||_{U'} > 0,$$

$$(6.8)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial\bar q}{\partial t} - \Delta q - 3\bar y^2\bar q = (\bar y - y_d)^5 \text{ dans } Q, \\ \bar q = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \bar q(.,T) \equiv 0, \end{cases}$$

$$(6.9)\qquad \langle\bar p, \frac{d\bar z}{dt} - \Delta\bar z - 3\bar y^2\bar z\rangle_{U'U} = \langle\bar\mu, z(.,T)\rangle_{Z'Z}\ , \ \forall z \in Y_0\ ,$$

$$(6.10)\qquad \langle\bar\mu, z - \bar y(.,T)\rangle_{Z'Z} \le 0,\ \forall z \in Z_\delta,$$

et

$$(6.11)\qquad \alpha \int_Q (N\bar u + q)(v - \bar u)\, dx\, dt + \langle\bar p, v-\bar u\rangle_{U'U} \ge 0,\ \forall v \in K \cap U. \quad \square$$

<u>Démonstration</u>

On vérifie par les techniques de [6] [7] que J est différentiable et que le gradient J en $\bar u$ est $N\bar u+\bar q$, où $\bar q \in W^{2,1;6/5}(Q)$ est solution de (6.8) (notons que $W^{2,1;6/5}(Q)$ est inclus dans $L^2(Q)$ pour $n \le 3$; cf. J.L. Lions [23], p. 40). Le théorème 3.1 implique donc l'existence de $\alpha \ge 0$, $\bar\mu \in L^\infty(\Omega)'$, $\bar p \in U'$ tels que (6.10)(6.11) et

$$(6.12)\qquad \alpha + ||\bar\mu||_{Z'} > 0$$

$$(6.13)\qquad \langle\bar p, v\rangle_{U'U} = \langle\bar\mu, z(.,T)\rangle_{Z'Z},$$

pour tout $(v,z) \in U \times Y$, vérifiant la relation

$$(6.14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} - \Delta z - 3\bar y^2 z = v \text{ dans } Q, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma\ , \\ z(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega\ . \end{cases}$$

L'application $z \to \frac{dz}{dt} - \Delta z - 3\bar y^2 z$ étant surjective de Y_0 dans U (voir la démonstration de la proposition 6.1), (6.13)(6.14) équivaut à (6.9). Démontrons (6.7). Si $\alpha \neq 0$, c'est immédiat. Si $\alpha = 0$, $\bar{\mu} \neq 0$ d'après (6.12). De (6.10) on déduit que $\langle\bar{\mu},\bar{y}(.,T)\rangle > 0$. Comme $\bar{\mu}$ est continue sur $L^\infty(\Omega)$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que , pour tout $z \in Y$,

$$(6.15) \qquad ||z(.,T) - y(.,T)||_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$$

implique

$$(6.16) \qquad \langle\bar{\mu},z(.,T)\rangle > 0.$$

Il suffit d'exhiber z dans Y_0 vérifiant (6.15) : de (6.9) et (6.16), il s'ensuit alors que $\bar{p}$ n'est pas nul. Posons $w = z-y$. Il vient

$$(6.17) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} - \Delta w = v \text{ dans } Q, \\ w \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ w(x,0) = - y_0(x), \text{ p.p.} x \in \Omega , \end{cases}$$

où

$$v = \frac{dz}{dt} - \Delta z + \frac{d\bar{y}}{dt} - \Delta\bar{y}$$

peut être pris arbitrairement dans U. Nous choisissons v de la forme

$$(6.18) \qquad \begin{cases} v(x,t) \in L^2(Q), \\ v(x,t) \equiv 0 \text{ pour } t \in (T/2,T). \end{cases}$$

D'après les propriétés régularisantes du semi-groupe associé à l'opérateur $-\Delta$ (de domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$), il est clair que tout v de la forme (6.18) est dans U et il existe $C_1 > 0$ tel que

$$||w(.,T)||_{H^2(\Omega)} \leq C_1||w(.,T/2)||_{L^2(\Omega)}$$

d'où, $H^2(\Omega)$ étant inclus dans $C(\bar{\Omega})$ pour $n \leq 3$, l'existence de $C_2 > 0$ tel que

$$||w(.,T)||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 ||w(.,T/2)||_{L^2(\Omega)} .$$

Or nous savons que l'ensemble des $w(.,T/2)$ obtenu lorsque $v(x,t)$ varie est dense dans $L^2(\Omega)$ (J.L. Lions [20]). Il existe donc v vérifiant (6.18) tel que la solution w de (6.17) vérifie $||w(.,T/2)||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon/C_2$, d'où le résultat. □

Remarque 6.1

(i) Si $u \in L^\beta(Q)$, $Z_u \in W^{2,1;\beta}(Q)$ et $Z_u(.,T)$ est dans $B^{2(1-1/\beta),\beta}(\Omega)$ (J.L. Lions [23], p. 39), espace inclus dans $C(\bar{\Omega})$ si $\beta > \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$; $L^\beta(Q)$ est donc inclus dans $L^\beta(Q)$ pour tout $\beta > 2$. U est donc dense dans $L^2(Q)$. Ceci permet d'énoncer pour ce problème les analogues des remarques 2.3, 2.4, 2.5.

(ii) L'équation d'état linéarisée établit un isomorphisme entre U et Y ; on en déduit que si u est un point interne à $K \cap U$, le problème est qualifié ($\alpha = 1$) d'après le point (i) du théorème 3.2 ; le multiplicateur $\bar{p}$ est alors dans $L^2(Q)$. □

VII - CONTROLE D'UN SYSTEME NON LINEAIRE DE TYPE HYPERBOLIQUE AVEC CONTRAINTE SUR L'ETAT FINAL

Nous supposons maintenant que $\Omega =]0,1[$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$. L'équation du système est

$$(7.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y^\alpha = u \text{ dans } Q, \\ y \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ y(.,0) = \dfrac{dy}{dt}(.,0) \equiv 0. \end{cases}$$

Si u est donné dans $L^2(Q)$, le système (7.1) admet une solution au voisinage de $t = 0$, mais la solution, notée y_u, peut exploser en un temps fini (J.F. Bonnans [ ]). Le critère est

$$J(u) = \frac{N}{2} \int_Q u^2 \, dx\, dt + \frac{1}{2\alpha} \int_Q |y-y_d|^2 \quad dx\, dt,$$

où $N \geq 0$ et $y_d \in L^{2\alpha}(Q)$ sont donnés. Soit K un convexe fermé de $L^2(Q)$ et $\delta > 0$. Le problème est

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \text{Min } J(u), \\ u \in K, \ |\dfrac{\partial}{\partial x} y_u(x,T)| \leq \delta \ , \text{ p.p.} x \in \Omega \ . \end{cases}$$

Montrons que la contrainte sur l'état final a un sens. Si u est un contrôle admissible, y_u (dont on vérifiera l'unicité) est dans $L^{2\alpha}(Q)$, donc y_u vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 y_u}{\partial x^2} = f \text{ dans } Q, \\ y \equiv 0 \text{ sur } \Sigma \\ y(.,0) = \dfrac{dy}{dt}(.,0) \equiv 0, \end{cases}$$

où $f \in L^2(Q)$; on sait alors (J.L. Lions, E. Magenes [24]) que $y \in Y_1$ où

$$Y_1 = \{y \in C(0,T,H_0^1(\Omega)) \; ; \frac{\partial y}{\partial t} \in C(0,T,L^2(\Omega))\}.$$

Ceci donne un sens à la contrainte sur l'état. Analysons (7.1). Soit z_u la solution de

$$(7.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = u \text{ dans } Q, \\ z \equiv 0 \text{ sur } \Sigma \, , \\ z(.,0) \equiv \dfrac{d}{dt} z(.,0) \equiv 0, \end{cases}$$

et posons

$$U = \{u \in L^2(Q) \; ; \; \frac{\partial}{\partial x} z_u(.,T) \in L^\infty(\Omega)\}$$

$$Y = \{y \in L^2(Q) \; ; \; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in L^2(Q) \; ; \; y \equiv 0 \text{ sur } \Sigma \; ; \; y(.,0) \equiv 0 \; ; \; \frac{\partial y}{\partial x}(.,T) \in L^\infty(Q)\}.$$

Les espaces U et Y ne sont pas triviaux ; par exemple, l'élément

$$u(x,t) = w(x), \; \forall x \in \Omega \, , \; t \in (0,T),$$

où w est un vecteur propre de $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ (associé aux conditions de Dirichlet) est dans U. Munis des normes du graphe, U et Y sont des espaces de Banach. Posons

$$\mathcal{O} = \{u \in U \; ; \; (7.1) \text{ a au moins une solution } y_u \text{ dans } Y\}.$$

<u>Théorème 7.1</u>

L'ensemble $\mathcal{O}$ est un ouvert connexe non vide de U. L'application

$$\mathcal{O} \to Y$$

$$u \to y_u \text{ solution de (7.1)}$$

est univoque et de classe C^1. □

La démonstration du théorème utilise deux lemmes.

Lemme 7.1

Soit $q \in L^2(Q)$. L'équation

$$(7.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qw = u \text{ dans } Q, \\ w \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ w(.,0) = \dfrac{\partial w}{\partial t}(.,0) \equiv 0, \end{cases}$$

a une solution unique dans Y_1. □

Dans les démonstrations, nous utiliserons les notations

$$|z| = (\int_\Omega z(x)^2 \, dx)^{1/2}$$

$$||z|| = (\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x}(x)^2 \, dx)^{1/2}$$

Notons que Ω étant borné, on peut prendre $||.||$ pour norme de $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration du lemme 7.1

Multiplions formellement (7.4) par $\frac{dw}{dt}$ (ce sera justifié par la suite) et intégrons en espace, il vient (les C_i désignant des constantes positives) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2 + ||w||^2\right) = \int_\Omega (-qw+u)\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dx$$

$$\leq |q|\ ||w||_{L^\infty(\Omega)}\ \left|\frac{dw}{dt}\right| + |u|\ \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\ ||w||^2_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{2}(|q|^2+1)\ \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}|u|^2$$

$$\leq \frac{C_1}{2}\ ||w||^2 + \frac{1}{2}(|q|^2+1)\ \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}|u|^2$$

la dernière inégalité étant justifiée par l'inclusion continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ pour $n = 1$. De l'inégalité de Gronwall, on déduit les estimations

$$||w||_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_2,$$

$$\left|\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_3,$$

où les constantes C_2, C_3 dépendent des normes de u et q dans $L^2(Q)$, ainsi que de la géométrie de Ω. On en déduit une estimation de w dans $L^\infty(Q)$, donc de qw dans $L^2(Q)$; $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ est donc estimé dans $L^2(Q)$, d'où (classiquement) l'estimation a priori (formelle)

(7.5) $$||w||_{Y_1} \leq C_4.$$

Pour justifier l'estimation a priori et prouver l'existence de la solution, on discrétise en espace le système par la méthode de Faedo-Galerkine ; le système (7.4) se réduit alors à une équation différentielle, qui admet une solution au voisinage de l'instant 0. Les mêmes estimations a priori que ci-dessus, qui sont alors justifiées, montrent que le système discret admet une solution sur (0,T), vérifiant (7.5). On passe alors à la limite sans difficultés.

L'unicité de w résulte du théorème 2.2, p. 200 de J.L. Lions [23]. □

Lemma 7.2

Si u L^1 $(0,T,H_0^1(\Omega))$, la solution z de (7.3) vérifie

$$z \in C(0,T,H^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} \in C(0,T,H^1(\Omega)). \quad \square$$

Démonstration

La démonstration s'obtient en multipliant formellement l'équation (7.3) par $-\frac{\partial^{\xi} z}{\partial^2 x \partial t}$ puis en utilisant les techniques de J.L. Lions, E. Magenes [24], vol 1, ch.3, §δ.

Démonstration du théorème 7.1

Soit l'application

$$F : Y \times U \to U,$$

$$(y,u) \to \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y^\alpha - u.$$

On peut vérifier que $y^\alpha \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$. Le lemme 7.2 implique que la solution z de (7.3), avec y^α au second membre, vérifie $z(.,T) \in H^2(\Omega)$, donc $\frac{\partial z}{\partial x}(.,T) \in H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$; l'image de F est donc dans U, et on vérifie aisément que F est de classe C^1. Evidemment $\mathcal{O} = F(Y, \{0\}_U)$; donc $\mathcal{O}$ est connexe et non vide. Etudions le système

$$(7.6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha y^{\alpha-1} z = f \text{ dans } Q, \\ z \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ z(.,0) = 0 = \dfrac{\partial z}{\partial t}(.,0) \equiv 0, \end{cases}$$

où $f \in U$ et $y \in Y$ sont donnés ; y étant dans $L^\infty(Q)$, (7.6) admet d'après le lemme 7.1 une solution unique dans Y_1. Mais on vérifie que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha\, y^{\alpha-1}\, z + f$$

est dans U, et z est donc dans Y. On peut donc appliquer à F le théorème des fonctions implicites, qui donne la conclusion. □

Nous passons maintenant à l'étude du problème de contrôle proprement dit.

<u>Théorème 7.2</u>

On suppose l'existence d'un contrôle admissible et N > 0 ou K est borné dans $L^2(Q)$.

Alors le problème (7.2) a au moins une solution. □

Démonstration

Soit $\{u^n\}$, $\{y^n\} = \{y_{u^n}\}$ une suite minimisante. Il vient

$$u^n \text{ est bornée dans } L^2(Q),$$

$$y^n \text{ est bornée dans } L^{2\alpha}(Q),$$

d'où avec (7.1) et la contrainte sur l'état :

$$y^n \text{ borné dans } Y.$$

Il existe donc $(\bar{u},\bar{y}) \in L^2(Q) \times Y$ et $\xi \in L^2(Q)$ tels que

$$\begin{array}{ll} u^n \rightharpoonup \bar{u} & L^2(Q) \text{ faible,} \\ y^n \rightharpoonup \bar{y} & Y \text{ faible } *, \\ (y^n)^\alpha \rightharpoonup \xi & L^2(Q) \text{ faible.} \end{array}$$

Mais Y_1 est inclus dans $H^1(Q)$, et l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^{2\alpha}(Q)$ est compacte puisque $Q \subset \mathbb{R}^2$ (R.A. Adams [1]) ; d'où

$$(y^n)^\alpha \to \bar{y}^\alpha \qquad L^2(Q) \text{ fort.}$$

Ceci permet le passage à la limite dans l'équation d'état. On vérifie alors que $\bar{u}$ est solution de (7.2). □

Pour l'expression des conditions d'optimalité, notons

$$Z = L^\infty(\Omega),$$
$$Z_\delta = \{z \in Z,\ ||z||_Z \leq \delta\} .$$

Théorème 7.3

Soit $\bar{u}$ une solution de (7.2), et $\bar{y}$ l'état associé. Il existe $\alpha \geq 0$, $\bar{q} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$,

$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T,H^{-1}(\Omega))$, $\bar{p} \in U'$, $\bar{\mu} \in Z'$ tels que

(7.7) $\alpha + ||\bar{p}||_{U'} > 0,$

(7.8) $$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} - \alpha \bar{y}^{\alpha-1} = |\bar{y} - y_d|^{\alpha-2} (\bar{y} - y_d) \text{ dans } Q, \\ \bar{q} \equiv 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \bar{q}(.,T) = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}(.,T) \equiv 0 \end{cases}$$

(7.9) $<\bar{p}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha \bar{y}^{\alpha-1} z>_{U'U} = <\bar{\mu}, \frac{\partial}{\partial x} z(.,T)>_{Z'Z}, \forall x \in Y,$

(7.10) $<\bar{\mu}, z - \frac{\partial}{\partial x} \bar{y}(.,T)>_{Z'Z} \leq 0, \forall z \in Z_\delta,$

(7.11) $\alpha \int_Q (N\bar{u} + \bar{q})(v-\bar{u})\, dx\, dt + <\bar{p}, v-\bar{u}>_{U'U} \geq 0, \forall v \in K \cap U.$ □

<u>Démonstration</u>

On peut vérifier que l'application $u \to J(u)$ est différentiable de $L^2(Q)$ dans $\mathbb{R}$; son gradient est de la forme $N\bar{u}+\bar{q}$, $\bar{q}$ étant solution de (7.8). A priori $\bar{q} \in L^2(Q)$; on peut montrer (J.L. Lions [23], p. 197) que $\bar{q}$ est dans $L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$ dans $L^{\infty}(0,T,H^{-1}(\Omega))$. La conclusion s'obtient alors en appliquant les théorèmes 3.1 et 7.1, avec les mêmes techniques que précédemment. Le seul point délicat est de véfier (7.7), sachant que $\alpha + ||\bar{\mu}||$ est strictement positif. Ceci revient à vérifier que $\bar{p}$ est non nul si $\bar{\mu}$ n'est pas nul. De (7.10) on déduit que $<\bar{\mu}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(.,T)>$ est strictement positif ; de

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \bar{y}^{\alpha} = \bar{u} \text{ dans } Q,$$

on déduit que

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - \alpha \bar{y}^{\alpha-1} \bar{y} = v,$$

où $v = \bar{u} + (1-\alpha)\bar{y}^{\alpha}$ est un élément de U.

Il vient donc avec (7.9)

$$<\bar{p}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha\bar{y}^{\alpha}> = < \bar{\mu}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(.,T)> \quad > 0,$$

ce qui prouve que $\bar{p}$ n'est pas nul. □

Remarque 7.1

D'après le lemme 7.2, $L^1(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap L^2(\Omega)$ est inclus dans U, ce qui prouve que U est dense dans $L^2(Q)$. On en déduit l'analogue des remarques 2.3, 2.4, 2.5. On vérifie également si $\bar{u}$ est un point interne à $K \cap U$, le problème est qualifié ($\alpha = 1$). □

Remerciements

Nous remercions le professeur J.L. Lions pour l'attention qu'il a portée à ce manuscript et les améliorations qui en ont résultées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. ADAMS. "Sobolev spaces". Academic Press, New York, 1975.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions". Comm. on Pure and Appl. Math. 12, pp. 623-727, 1959.

[3] J.P. AUBIN, F. CLARKE. "Shadow prices and duality for a class of optimal control problems". SIAM J. Cont. Opt. 17, pages 567 à 586, 1979.

[4] V. BARBU, T. PRECUPANU. "Convexity and optimization in Banach spaces". Sijhoff & Noordhoff-Publishing House of Romania Academy, 1978.

[5] A. BERMUDEZ, C. SAGUEZ. A paraître.

[6] J.F. BONNANS. Thèse de docteur-ingérieur, Université de Technologie de Compiègne, 1982.

[7] J.F. BONNANS. "Analysis and control of a non-linear parabolic unstable system". Rapport INRIA n° 220 (à paraître dans le J. of large scale systems), 1983.

[8] J.F. BONNANS, C. MORENO, C. SAGUEZ. "Contrôle de domaines temporels". Rapport INRIA, 1984.

[9] N. BOURBAKI. "Variétés différentielles et analytiques". Hermann, Paris, 1971.

[10] E. CASAS. "Un problema de control de sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales con ligaduras sobre el estado". V. C.E.D.Y.A., Tenerife, 1982.

[11] E. CASAS. "Analisis numerico de algunos problemas de optimizacion estructural". Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela, 1982.

[12] E. CASAS. "Quelques problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état". C.R.A.S. Paris 296, pages 509 à 512, 1983

[13] E. CASAS. "Optimality necessary conditions for some structural design problems". A paraître.

[14] F.H. CLARKE. "A new approach to lagrange multipliers". Math. Op. Res. 1, pages 165 à 174, 1976.

[15] F.H. CLARKE. "Optimization and nonsmooth analysis". Wiley-Interscience, New York, 1983.

[16] I. EKELAND, R. TEMAM. "Analyse convexe et problèmes variationnels". Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1979.

[17] A.D. IOFFE. "Necessary and sufficient conditions for a local minimum". SIAM J. Cont. Opt. 17, pages 245 à 250, 1979.

[18] H. ISHII. "Asymptotic stability and blowing up of solutions of nonlinear equations". J. Diff. Equ. 26, 1977, pages 291 à 319.

[19] I. LASIECKA. "State constrained control problems for parabolic systems : regularity of optimal solutions". Appl. Math. Opt. 6, pages 1 à 29, 1980.

[20] J.L. LIONS. "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles". Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[21] J.L. LIONS. "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires". Dunod, Paris, 1969.

[22] J.L. LIONS. "Function spaces and optimal control of distributed systems". Cours à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro, 1980.

[23] J.L. LIONS. "Contrôle des systèmes distribués singuliers". Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[24] J.L. LIONS, E. MAGENES. "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Volumes 1 et 2, Dunod, Paris, 1968.

[25] U. MACKENROTH. "On parabolic distributed optimal control problems with restrictions on the gradient". Appl. Math. Opt. 10, pages 69 à 95, 1983.

[26] U. MACKENROTH. "Convex parabolic boundary control problems with pointwise state constraints". J. Math. An. Appl. 87, pages 256 à 277, 1982.

[27] J. MOSSINO. "An application of duality to distributed optimal control problems with constraints on the control and the state". J. of Math. An. Appl. 50, pages 223 à 242, 1975.

[28] J. NEČAS. "Les méthodes directes dans la théorie des équations élliptiques". Acad. Sci. Prague, 1967.

ANNEXE

Extension de la notion de support aux éléments du dual de $L^\infty(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, où n est quelconque. Soit

$$K = \{y \in L^\infty(\Omega) \; ; \; |y(x)| \leq 1, \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Le but de cette annexe est de présenter une notion de support pour les éléments du dual de $L^\infty(\Omega)'$ qui dans le cas des normales à K coïncide en un certain sens avec l'ensemble des points au voisinage desquels y vaut $\pm$ 1. Dans le cas où on remplace $L^\infty(\Omega)$ par $C(\Omega)$, voir E. Casas [10].

Soit y_j, $j \in J$, la classe d'équivalence de y dans $L^\infty(\Omega)$. Pour $\varepsilon \in [0,1[$, définissons :

$$F_\varepsilon^j(y) = \overline{\{x \in \Omega \; ; \; |\; y^j(x) \;| \; \geq 1-\varepsilon\}},$$

$$F_\varepsilon(y) = \bigcap_{j \in J} F_\varepsilon^j(y).$$

On note m(.) la mesure de Lebesgue d'un ensemble.

Lemme A1

$$m(F_\varepsilon) = m(F_\varepsilon^j), \; \forall \; j \in J. \; \square$$

Démonstration

On supprime la variable y. Il suffit de montrer que $m(f_\varepsilon) \geq m(F_\varepsilon^j)$. Soit

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - F_\varepsilon ,$$

$$\Omega_\varepsilon^j = \Omega - F_\varepsilon^j \quad , \; j \in J.$$

Les ensembles Ω_ε et Ω_ε^j sont ouverts. Soit une suite $K_n \subset \Omega_\varepsilon$ de compacts telle que

$$m(\Omega_\varepsilon - K_n\} \leq \frac{1}{n} .$$

Puisque

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j \in J} \Omega_\varepsilon^j ,$$

il existe un ensemble fini $J_n \subset J$ tel que

$$K_n \subset \bigcup_{j \in J_n} \Omega_\varepsilon^j .$$

D'autre part on vérifie aisément que, J_n étant fini :

$$m(\Omega_\varepsilon^{j_o}) = m(\bigcup_{j \in J_n} \Omega_\varepsilon^j), \; \forall j_o \in J.$$

D'où

$$m(F_\varepsilon^{j_o}) = m(\Omega) - m(\Omega_\varepsilon^{j_o}) ,$$

$$= m(\Omega) - m(\bigcup_{j \in J_n} \Omega_\varepsilon^j) ,$$

$$\leq m(\Omega) - m(K_m) ,$$

$$= m(\Omega - \Omega_\varepsilon) + m(\Omega_\varepsilon - K_n) ,$$

$$\leq m(F_\varepsilon) + \frac{1}{n} ,$$

d'où le résultat. □

Corollaire

Soit $\varepsilon \in [0,1[$ donné.

$$m(F_\varepsilon(y)) = 0 \iff F_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Démonstration

Soit z un élément de la classe d'équivalence de y. Si $m(F_\varepsilon(y)) = 0$, définissons z_n par :

$$z_1(x) = \begin{cases} z(x) \text{ si } |z_o(x)| < 1-\varepsilon, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $z_o(x)$ est un élément de la classe d'équivalence de y et z_o est partout strictement inférieure à $1-\varepsilon$; donc $F_\varepsilon(y) = \emptyset$. La réciproque est immédiate. □

Nous définissons maintenant

$$F(y) = \bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(y).$$

Remarque A1

$F(y)$ contient $F_o(y)$ mais l'inclusion est en général stricte. Par exemple, prendre $\Omega =]-1,+1[$ et $y(x) = 1-|x|$. Alors $F(y) = \{0\}$ et $F_o(y) = (\overline{y}) = \emptyset$. □

Théorème A1

Soit y donné dans K. Alors

$$\{F(y) = \emptyset\} \iff \{y \in \mathring{K}\} \iff \{\partial I_K(y) = \{0\}\}. \quad \square$$

Démonstration

D'après le théorème de Cantor, si $F(y) = \emptyset$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_\varepsilon(y) = \emptyset$; y est donc un point intérieur de K, donc $\partial I_K(y) \equiv \{0\}$. Prouvons la réciproque. Si y ∂K, il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach un hyperplan séparant strictement y et $\overset{\circ}{K}$. Donc, si $\partial I_K(y) \equiv \{0\}$, y est dans $\overset{\circ}{K}$, donc $F(y) = \emptyset$. □

Montrons maintenant que, dans un certain sens, F(y) est le support d'un élément de $\partial I_K(y)$. Soit $z \in L^\infty(\Omega)$ et z_i, $i \in I$, les éléments de sa classe d'équivalence. Définissons :

$$N_\varepsilon^j(z) = \overline{\{x \in \Omega ; |z_j(x)| \leq \varepsilon\}}, \quad j \in I,$$

$$N_\varepsilon(z) = \bigcap_{j \in I} N_\varepsilon^j(j),$$

$$M_\varepsilon(z) = \overset{\circ}{\widehat{N_\varepsilon(z)}} .$$

De façon intuitive, $M_\varepsilon(z)$ est le plus grand ouvert sur lequel z est inférieure à ε. Nous considérons maintenant

$$M(z) = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon(z).$$

M(z) est l'ensemble des points au voisinage desquels z est inférieure à ε, pour tout $\varepsilon > 0$.

Théorème A2

Soit μ un élément de $\partial I_K(y)$ et $z \in L^\infty(\Omega)$. Si $F(y) \subset M(z)$, alors

$$\langle \mu, z \rangle = 0. \quad \square$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et

$$z_\varepsilon(x) = \begin{cases} z(x) \text{ si } x \in N_\varepsilon(z), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $z_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et

$$Z_\varepsilon \to Z \quad L^\infty(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Or

$$\bigcap_{\varepsilon>0} F_{\varepsilon'}(y) = F(y) \subset M_\varepsilon(z).$$

Or $F_{\varepsilon'}(y)$ est compact pour tout ε' et $M_\varepsilon(z)$ est un ouvert ; il existe donc $\alpha > 0$ tel que $F_\alpha(y) \subset M_\varepsilon(z)$. Or z_ε est nulle sur $M_\varepsilon(z)$; on en déduit que pour β assez petit, $y \pm \beta z_\varepsilon$ est encore dans K ; donc $\langle\mu, z_\varepsilon\rangle = 0$, d'où, par passage à la limite, la nullité de $\langle\mu,z\rangle$. □

Corollaire A2

Si Z est dans $C(\bar{\Omega})$ et si z est nulle sur $F(y)$, alors

$$\langle\mu,z\rangle = 0, \ \forall\mu \in \partial I_K(y). \quad \square$$

Remarque

Si z n'est pas continue, l'inclusion

$$F(y) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} N_\varepsilon(z)$$

n'entraîne pas que $\langle\mu,z\rangle$ est nul. Soit en effet $\Omega =]-1,+1[$ et considérons la mesure de Dirac en 0 :

$$\delta : y \to y(0)$$

qui est un élément de $C(\bar{\Omega})'$. Puisque $C(\bar{\Omega})$ est un sous espace fermé de $L^\infty(\Omega)$, δ a, d'après le théorème de Hahn-Banach, une extension μ (en fait, une infinité) à $L^\infty(\Omega)'$; soit z_1, z_2 dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$z_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ 1 \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

$$z_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0, \\ 0 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Alors

$$\langle \mu, z_1, z_2 \rangle = 1 .$$

Pourtant, le point 0 est inclus dans les ensembles

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon(z_1) = [-1,0]$$

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon(z_2) = [0,1]. \quad \square$$

<u>Remarque A2</u>

On peut mener une analyse plus fine en distinguant les points aux voisinages desquels la fonction est proche de +1 ou -1. $\square$

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique